

5 класс (продолжительность — 3.5 часа)

5-1. Имеются 4 двери, на каждой на висит табличка. Оказалось, что три надписи верны, а одна неверна. За какой табличкой может выход? Укажите все варианты и докажите, что других нет.



5-2. Бабушка испекла блины и сложила их в стопку. Между каждыми двумя блинами или мёд, или варенье, или сметана. Сверху и снизу блины ничем не намазаны.

Оказалось, что у каждого блина ровно одна сторона намазана мёдом. Ровно у трети блином ровно одна сторона намазана вареньем. У 10 блинов ровно одна сторона намазана сметаной. Сколько блинов в стопке?

5-3. Вася хочет выложить в ряд 10 апельсинов, 11 бананов и 12 яблок. При этом он хочет, чтобы выполнялось свойство: рядом с каждым фруктом лежит ровно один фрукт другого вида. Сможет ли Вася так сделать?

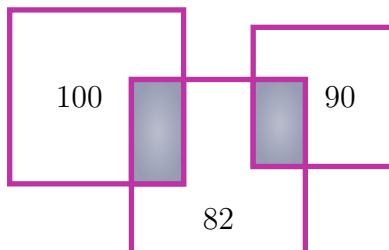
5-4. У Сильвера есть 900 монеток общей ценой 1000 пиастров (каждая монета достоинством в натуральное число пиастров). Докажите, что Сильвер сможет выбрать 100 монеток общей ценой ровно 200 пиастров.

5-5. Саша хочет разложить числа от 1 до 24 на 7 кучек так, чтобы в каждой кучке было бы число, равное сумме остальных чисел в группе. Докажите, что он так не сможет сделать.

5-6. В каждой клетке таблицы 100×100 лежит яблоко или апельсин, причём известно, что их поровну. Коле разрешено за один ход или поменять яблоко с апельсином, но только если они находятся в соседних по сторонам клеточках, или же убрать два одинаковых фрукта, но только если они находятся в соседних по сторонам клеточках. Всегда ли Коля сможет такими операциями убрать все фрукты?

6 класс (продолжительность — 3.5 часа)

6-1. С дрона были сделаны три снимка местности, на всех снимках зафиксировано поровну деревьев. На рисунке указаны количества деревьев в белых областях. Чему равно суммарное количество деревьев в серых областях?

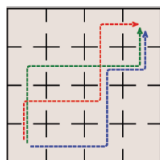


6-2. На трёх тарелках лежат орехи. Известно, что на какой-то тарелке в два раза больше орехов, чем на какой-то другой. Так же известно, что на какой-то тарелке в три раза больше орехов, чем на какой-то другой. Как распределены орехи по тарелкам, если всего имеется 140 орехов?

6-3. У Коли имеется несколько камней, каждый весит не обязательно целое количество грамм. Оказалось, что их можно разложить как на 10 кучек по 150 грамм каждая, так и на 15 кучек по 100 грамм каждая. Чему равно наименьшее возможное количество камней? Кучка может состоять в том числе и из одного камня.

6-4. На столе лежат 100 шаров, на которых написаны числа $1, 2, \dots, 100$. Играют двое. За ход нужно взять шар со стола и положить его в корзинку. Проигрывает тот игрок, после хода которого произведение всех чисел на шарах в корзинке станет делиться на 300. Кто может выиграть в этой игре вне зависимости от действий соперника — первый или второй?

6-5. Музей состоит из 16 комнат, образующих квадрат 4×4 . В каждой из комнат размещены экспонаты. Оказалось, что на любом пути из левого нижнего угла в правый верхний угол, проходящем ровно по семи комнатам (включая начальную и конечную, см. рисунок), суммарное число экспонатов в этих семи комнатах одно и то же, и равно K .



Аналогично, на любом пути из правого нижнего угла в левый верхний угол, проходящем ровно по семи комнатам (включая начальную и конечную), суммарное число экспонатов в этих семи комнатах одно и то же, и равно L . K может быть не равно L . Может ли в музее быть ровно 1500 экспонатов?

6-6. В каждой клеточке квадрата 5×5 Коля нарисовал стрелку: вниз, вверх, вправо или влево. Докажите, что можно стереть 20 стрелок так, чтобы никакие две их оставшихся стрелок не указывали бы на одну и ту же клеточку.

Стрелка указывает на клеточку, даже если между стрелкой и клеточкой есть другие стрелки.

7 класс (продолжительность — 3 часа 55 минут)

7-1. Произведение пяти чисел отрицательно, а сумма любых трёх из них — положительна. Сколько может быть положительных среди этих пяти чисел?

7-2. У Коли имеется несколько камней, каждый весит не обязательно целое количество грамм. Оказалось, что их можно разложить как на 10 кучек по 150 грамм каждая, так и на 15 кучек по 100 грамм каждая. Чему равно наименьшее возможное количество камней? Кучка может состоять в том числе и из одного камня.

7-3. В ряд растут 20 деревьев. На первом дереве 1 ворона, на втором 2 вороны, на третьем три вороны, ..., на двадцатом дереве 20 ворон. Каждую минуту улетаели две вороны, причём с соседних деревьев. Какое наибольшее количество ворон могло улететь?

7-4. Петя задумал такие 100 натуральных чисел, что их НОК **не** является квадратом. Затем он выписал на доску 100 чисел: НОК всех задуманных чисел без первого, НОК всех задуманных чисел без второго, ..., НОК всех задуманных чисел без сотого. Какое наибольшее количество точных квадратов могло оказаться среди выписанных на доске чисел?

7-5. В треугольнике ABC проведена медиана AD . Известно, что $\angle ADB = 45^\circ$, $\angle ACB = 30^\circ$. Найдите величину угла BAD .

7-6. По кругу стоят 80 корзин, по которым как-то разложены 333 ореха; пустые корзины могут быть. Белочка и Ворона играют в игру, первой ходит Белочка. Белочка может своим ходом взять все орехи из семи любых подряд идущих корзин. Ворона может своим ходом взять все орехи из одной корзины, но эта корзина должна быть рядом с той, из которой Белочка брала орехи на предыдущем ходу (и при этом из неё Белочка на предыдущем ходу орехи не брала). Докажите, что Белочка сможет забрать себе не менее 290 орехов.

Белочка и Ворона видят распределение орехов по корзинам.

8 класс (продолжительность — 3 часа 55 минут)

8-1. Произведение пяти чисел отрицательно, а сумма любых трёх из них — положительна. Сколько может быть положительных среди этих пяти чисел?

8-2. Точка M — середина стороны CD параллелограмма $ABCD$, а точки E и F — основания высот треугольника ABM , опущенных из вершин A и B соответственно. Докажите, что $DE = CF$.

8-3. Петя задумал такие 100 натуральных чисел, что их НОК **не** является квадратом. Затем он выписал на доску 100 чисел: НОК всех задуманных чисел без первого, НОК всех задуманных чисел без второго, ..., НОК всех задуманных чисел без сотого. Какое наибольшее количество точных квадратов могло оказаться среди выписанных на доске чисел?

8-4. Две бабушки торговали на рынке кабачками, у каждой было по 20 кабачков. Начальная цена кабачка была 50 рублей. Так как особым спросом кабачки не пользовались, то если у какой-то бабушки покупали кабачок, то вторая сразу же снижала цену на 1 рубль (кабачки продаются только по одному, и такого, чтобы кабачки продавались одновременно, не было; покупатель не обязательно покупает самый дешевый кабачок). Сколько денег могут выручить бабушки в сумме, когда распродадут все кабачки? Укажите все возможные варианты.

8-5. Дима нашел на чердаке сломанные весы. Они при взвешивании любого предмета случайно показывают вес либо на A граммов, либо на B граммов больше истинного, при этом $A \neq B$. Дима знает об этой особенности весов, но числа A и B ему неизвестны. У Димы есть 10 одинаковых камней. Как ему узнать, сколько весит один камень?

8-6. Пусть n и k — положительные целые числа, $k \leq n$. На острове живет n людей, каждый или всегда говорит правду, или всегда лжет. Жители знают друг про друга кто есть кто. Жителю острова можно задавать только вопросы вида: «Чётно ли количество лжецов в такой-то группе из k человек?», житель ответит «Да» или «Нет».

а) При каких значениях n и k можно определить про всех, кто всегда говорит правду, а кто всегда лжет?

б) В тех случаях, когда это можно определить, каково минимальное число вопросов для этого? Ответ может зависеть от n и k .